

Лекция 3

Тема. Числовая последовательность, её предел.

План лекции:

- 1) *Фундаментальные последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.*
- 2) *Подпоследовательности, частичные пределы. Верхний и нижний пределы последовательности, их свойства.*
- 3) *Теорема Больцано-Вейерштрасса. Критерии сходимости последовательности.*

§1. Фундаментальные последовательности.

Критерий Коши сходимости последовательности.

Теорема (критерий Коши). Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится (в $\mathbb{R}$, т.е. - к конечному пределу) $\Leftrightarrow$ она фундаментальная $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq n_{\varepsilon}, \quad \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Пример 1. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности

$$x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}.$$

Решение. Заданы $\forall \varepsilon > 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}$. Рассмотрим $|x_{n+p} - x_n|$:

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{\cos n!}{n(n+1)} + \frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)} - \left(\frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{\cos n!}{n(n+1)} \right) \right| = \\ &= \left| \frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \frac{\cos(n+2)!}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)} \right| \leq \left| \frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} \right| + \left| \frac{\cos(n+2)!}{(n+2)(n+3)} \right| + \dots + \\ &+ \left| \frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)} \right| \leq \text{используем неравенство } |\cos x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}: \\ &\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \end{aligned}$$

так как $\forall k \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, то

$$= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} \right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Найдём номер, начиная с которого выполняется неравенство $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$: $n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow n_{\varepsilon} = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right] + 1 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]. \quad \text{Тогда } \forall n \geq n_{\varepsilon} = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] \quad |x_{n+p} - x_n| < \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \text{ т.к.}$$

доказано, что данная последовательность - фундаментальная $\Leftrightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$.

§2. Подпоследовательности, частичные пределы.

Верхний и нижний пределы последовательности, их свойства.

Пусть (x_n) — последовательность и $n_1 < n_2 < \dots (n_k \in \mathbb{N})$. Последовательность $y_k \equiv x_{n_k} (k \in \mathbb{N})$ называется *подпоследовательностью* последовательности (x_n) .

Определение 1. Если частичная последовательность (x_{n_k}) сходится, то ее предел называется **частичным пределом** последовательности (x_n) .

Определение 2. Число $a \in \mathbb{R}$ называется **предельной точкой** числовой последовательности (x_n) , если любая ее окрестность содержит бесконечное число членов последовательности.

Частичный предел последовательности является одновременно и ее предельной точкой.

Определение 3. Наибольший (наименьший) частичный предел числовой последовательности (x_n) называется ее **верхним (нижним) пределом** и обозначается символом

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right).$$

Теорема. Любая числовая последовательность имеет верхний и нижний пределы.

Обозначим через $\text{Lim} \{x_n\}$ множество всех частичных пределов последовательности $\{x_n\}$. Тогда $\text{Lim} \{x_n\}$ не пусто и обладает наибольшим $(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n)$ и наименьшим $(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$ элементами.

Справедливы следующие утверждения:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$

4) Пусть $x_n \geq 0$ и $y_n \geq 0$ ($n=1, 2, \dots$). Тогда:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \end{aligned}$$

5) Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ то, какова бы ни была последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (x_n \geq 0)$$

Пример 2. Найти верхний и нижний пределы последовательности $x_n = \frac{2n-1}{n+1} \sin \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Первый сомножитель $\frac{2n-1}{n+1}$ - числовая последовательность, сходящаяся к 2.

Рассмотрим значения второго сомножителя при различных значениях n :

n	1	2	3	4	5	6	7	8...
$\sin \frac{\pi n}{2}$	1	0	-1	0	1	0	-1	0...

Выделим из данной последовательности следующие сходящиеся подпоследовательности:
 $k=1,2,\dots$

$$n=4k-3: \quad x_{4k-3} = \frac{2(4k-3)-1}{4k-3+1} \cdot 1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 2$$

$$n=4k, \quad n=4k-2: \quad x_{4k} = \frac{2 \cdot 4k-1}{4k+1} \cdot 0 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad x_{4k-2} = \frac{2 \cdot (4k-2)-1}{4k-2+1} \cdot 0 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$n=4k-1: \quad x_{4k-1} = \frac{2(4k-1)-1}{4k-1+1} \cdot (-1) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -2$$

Поэтому множество частичных пределов $\text{Lim} \{x_n\} = \{-2; 0; 2\}$, следовательно

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup \lim \{x_n\} = 2, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf \lim \{x_n\} = -2.$$

Пример 3. Найти $\inf x_n, \sup x_n, \underline{\lim} x_n, \overline{\lim} x_n$ для последовательности

$$x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Решение.

$$\frac{n(n-1)}{2} : 0, 1, 3, 6, 10, 15, \dots \Rightarrow (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} : 1, -1, -1, 1, 1, -1, \dots \Rightarrow \text{период повтора} = 4$$

$$(-1)^{n+1} : 1, -1, 1, -1, \dots \Rightarrow \text{период повтора} = 2$$

Общий период повтора: 4.

$$1) \quad n = 4k - 3, \Rightarrow x_{4k-3} = 1 + 2 + 3 = 6 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 6,$$

$$2) \quad n = 4k - 2, \Rightarrow x_{4k-2} = 1 - 2 - 3 = -4 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -4,$$

$$3) \quad n = 4k - 1, \Rightarrow x_{4k-1} = 1 + 2 - 3 = 0 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

$$4) \quad n = 4k, \Rightarrow x_{4k} = 1 - 2 + 3 = 2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 2,$$

$$\lim x_n = \{-4, 0, 2, 6\}, \quad \inf x_n = -4, \quad \sup x_n = 6, \quad \underline{\lim} x_n = -4, \quad \overline{\lim} x_n = 6$$

§3. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Критерии сходимости последовательности.

Теорема (Больцано-Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Иными словами, у всякой ограниченной последовательности есть по меньшей мере один конечный частичный предел.

Теорема. Равенство $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ является необходимым и достаточным условием существования (конечного или бесконечного) предела последовательности $\{x_n\}$.